Soluzioni del compito di Complementi I del 26-09-05;
Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\sin t} = \frac{1}{b}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{c+\sin t} \quad c = \frac{a}{b}$.

$\displaystyle\frac{1}{b}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{c+\sin t} = \frac{2}{b}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2icz-1}$ e γ_1 è la curva nel piano complesso $z(t) = e^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Il denominatore ha le due radici immaginarie pure $z_\pm = -ic \pm i\sqrt{c^2-1}$ e solo z_+ sta all'interno della curva data. Si ottiene quindi $I = \dfrac{4\pi i}{b} \displaystyle\lim_{z\to z_+} \frac{1}{z-z_-} = \frac{2\pi}{b}\frac{|b|}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2}{3}\pi$.

2) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2t} + \delta(t-1) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

Tenendo conto che $\mathcal{L}(y') = p\mathcal{L}(y) - y(0)$ si ottiene ($a_0 > 2$) $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_o - i\infty}^{a_o+i\infty} dp\, e^{pt}\Big(\frac{e^{-p}}{(p-1)(p-2)} + \frac{1}{(p-1)(p-2)^2}\Big) = (e^{2t-2} - e^{t-1})H(t-1) + te^{2t} - e^{2t} + e^t$

Si faccia attenzione al fatto che $a_0 > 2$. Prendere un valore più piccolo comporterebbe l'esclusione per punto $p = 2$ quale singolarità dell'integrale con conseguente errore.

3) Il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\vec{e}_1 + \dfrac{2xy(x-1)}{(x^2+y^2)^2}\vec{e}_2$ è chiaramente conservativo nel suo dominio di definizione ed una funzione potenziale è $-\dfrac{x(1-x)}{x^2+y^2}$

4) Abbiamo $x = \sqrt{1+\cos\vartheta}\cos\vartheta$, $y = \sqrt{1+\cos\vartheta}\sin\vartheta$,

i) Semplicità . Se esistessero due punti ϑ e ϑ' tali che $(x(\vartheta), y(\vartheta)) = (x(\vartheta'), y(\vartheta')$ con ϑ oppure ϑ' appartenenti a $(0, 2\pi)$ allora si avrebbe $\rho(\vartheta) = \rho(\vartheta')$ e quindi $\sqrt{1+\cos\vartheta} = \sqrt{1+\cos\vartheta'}$. Ne consegue che (prendiamo l'intervallo $[-\pi, \pi]$ che è più facile) possono aversi due possibilità : la prima è che $\vartheta' = -\vartheta$ e $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e la seconda è $\vartheta' = -\vartheta$ e $\vartheta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Supponiamo che $\vartheta' = -\vartheta$ e $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Abbiamo $y(\vartheta) = \sqrt{1+\cos\vartheta}\sin\vartheta$ e $y(\vartheta') = \sqrt{1+\cos\vartheta}(-\sin\vartheta)$ da cui la semplicità . Il caso in cui $\vartheta' = -\vartheta$ e $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è analogo.

ii) Per l'area si possono usare sostanzialmente tre formule diverse.

La curva non è regolare. in quanto $y'(\vartheta) = -\dfrac{\sin^2\vartheta}{2\sqrt{1+\cos\vartheta}} + \dfrac{\cos\vartheta}{\sqrt{1+\cos\vartheta}}$ e per $\vartheta = \pi$ la curva non è derivabile. È viceversa regolare a tratti.

ii.1) Sia calcola l'integrale doppio $\displaystyle\int\int_{\{(x,y)\in D\}} dxdy$ dove D è l'interno della curva chiusa determinata dall'equazione $\rho = \sqrt{1+\cos\vartheta}$. Passando a coordinate polari si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{1+\cos\vartheta}} \rho d\rho = \pi$

ii.2) Ci si ricorda che l'area della figura può essere espressa come un integrale curvilineo dalla formula $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\varphi^+}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\vartheta) = \pi$ (φ^+ vuol dire che la curva è percorsa in senso antiorario) ii.3) La stessa area è esprimibile come $\frac{1}{2}\int_{\varphi^+} xdy$ oppure $-\frac{1}{2}\int_{\varphi^+} ydx$ ed il risultato chiaramente non cambia.

4.1) Detto $\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(i)}(t)\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x_i')^2 + (y_i')^2}$ si ha che il baricentro del filo è dato da

$\underline{b} = \frac{1}{M_1 + M_2}\int_{-1}^{1} dt\big(\underline{\gamma}^{(1)}(t)\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(1)}\| + \underline{\gamma}^{(2)}(t)\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(2)}\|\big)$ e vogliamo $\underline{b} = \underline{0}$.

$\int_{-1}^{1} dt(\gamma^{(1)})_1(t)\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(1)}\| = \int_{-1}^{1} dt\, bt^3\, \sqrt{4t^2 + 9b^2t^4} = 0$ in quanto la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico.

$\int_{-1}^{1} dt(\gamma^{(1)})_2(t)\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(1)}\| = \int_{-1}^{1} dt = \int_{-1}^{1} dt\, t^2\, \sqrt{4t^2 + 9b^2t^4} = \int_{-1}^{1} dt\, t^2|t|\, \sqrt{4 + 9b^2t^2} =$

$= 2\int_{0}^{1} dt\, t^3\, \sqrt{4 + 9b^2t^2} = \frac{13^{3/2}}{27}(1 - \frac{26}{49})$

$\int_{-1}^{1} dt(\gamma^{(2)})_1(t)\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(2)}\| = \int_{-1}^{1} dt\, t\sqrt{1 + a^2} = 0$ in quanto la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico.

$\int_{-1}^{1} dt(\gamma^{(2)})_2(t)\|\frac{d}{dt}\underline{\gamma}^{(2)}\| = \int_{-1}^{1} dt\, (c - at)\sqrt{1 + a^2} = \int_{-1}^{1} dt\, c\sqrt{1 + a^2} = 2c\sqrt{1 + a^2}$. e quindi la relazione è $2c\sqrt{1 + a^2} = \frac{13^{3/2}}{27}(1 - \frac{26}{49})$